На правах рукописи

Кор

Королева Татьяна Эдуардовна

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

01.01.07 – Вычислительная математика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре высшей математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Научный руководитель:	**Виноградова Полина Витальевна** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Воеводин Анатолий Фёдорович** доктор физико-математических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, главный научный сотрудник лаборатории прикладной и вычислительной гидродинамики ИГиЛ СО РАН
	Егоров Иван Егорович доктор физико-математических наук, профессор, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института математики СВФУ
Ведущая организация:	**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тихоокеанский государственный университет»**

Защита диссертации состоится 30 июня 2016 года в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212. 081. 21 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, дом 18, корп. 2, ауд. 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотекеим. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35. Электронная версия опубликована на официальном сайте ФГАОУ ВО КФУ http: //www.kpfu.ru.

Автореферат разослан "____ "___________

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор **Задворнов О.А.**

Актуальность темы. Важнейшим направлением современной математики является всестороннее изучение операторных уравнений. Из литературы, посвященной теории абстрактных дифференциально–операторных уравнений, можно указать ряд основательных монографий и обзоров, среди которых выделим монографии Ф.Е. Браудера, Х. Гаевского, К. Грёгера и К. Захариаса, Ж.-Л. Лионса, С.Г. Крейна, М.М. Вайнберга, H.O. Fattorini, E. Zeidler, а также обзоры И.В. Скрыпника, Ю.А. Дубинского, Р.И. Качуровского. С помощью операторного метода можно исследовать обширный класс уравнений. Самые разные виды уравнений, такие как линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения можно представить в операторном виде. С помощью методов функционального анализа и теории операторов можно изучать вопросы, связанные с разрешимостью поставленных задач, и составлять алгоритмы нахождения приближенных решений. Известно, что теория и методология операторных уравнений широко используются в вычислительной математике.

Среди дифференциально-операторных уравнений наиболее детально изучены уравнения первого и второго порядков. В этой связи можно указать работы А.Г. Зарубина, П.В. Виноградовой, которые посвящены исследованию сильных решений задачи Коши для линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Существование, единственность и непрерывная зависимость сильных решений задачи Коши для различных линейных уравнений второго порядка с переменными областями определения доказаны в работах Д.А. Ляхова, С.П. Ходоса.

Разрешимость линейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка исследовалась в работах А.Р. Алиева, К.В. Василевского, А.М. Мамедова, Н.И. Юрчука. С позиций спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве и метода Фурье исследования дифференциально-операторных уравнений первого и высших порядков представлены в монографии А.А. Дезина [1].

Ю.А. Дубинским изучены вопросы классификации дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка, постановки задач для этих уравнений и их разрешимость в пространствах Соболева-Слободецкого.

Однако вопрос о разрешимости дифференциально-операторных уравнений третьего порядка в функциональных пространствах, являющихся аналогом

[1]Дезин А.А. Дифференциально – операторные уравнения // Труды МААН. 2000. Т. 229. М.: Наука.

пространств Соболева $W_p^{2bm,m}(Q)$, остается открытым.

Заметим, что некоторые уравнения, возникающие при изучении процессов динамики влажности почвы и грунтовых вод, распространения нестационарных акустических волн, процессов релаксации при переносе тепла можно привести к дифференциально-операторным уравнениям третьего порядка в гильбертовом пространстве.

Важным инструментом при изучении приближенного решения краевых задач для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, разнообразных задач гидродинамики и многих других являются проекционные и проекционно-разностные методы. Основоположниками этих методов были Б.Г. Галёркин, И.Г. Бубнов, Н.М. Крылов, Г.И. Петров, В. Ритц, Н.Н. Боголюбов, М.Б. Келдыш, Л.В. Канторович и другие.

Общая теория проекционных методов для стационарных и нестационарных уравнений первого и второго порядка изложены, например, в книгах Х. Гаевского, К. Грёгера, К. Захариаса; М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П.Забрейко; Г.И. Марчука, В.И. Агошкова; С.Г. Михлина; Ж-П. Обэна; Р. Варги; К. Флетчера; В.В. Шайдурова; R. Glowinski; M. Chen, Z. Chen, G. Chen.

Как средство при доказательстве теорем существования решений нестационарных уравнений, метод Галёркина использовался в работах Ю.А. Дубинского, М.И. Вишика, О.А. Ладыженской и других авторов.

Метод Галёркина как основа для численного решения нестационарных уравнений исследовался в трудах П.Е. Соболевского, Г.М. Вайникко, П.Э. Оя, А.Г. Зарубина, М.А. Велиева, П.В. Виноградовой, В.Р. Кардашова, П.Э. Оя, А.Д. Ляшко, С.В. Поборчего, В.В. Смагина и других работах.

Л.В. Канторович отметил ряд проблем, которые возникают в общей теории приближенных методов решения операторных уравнений и уравнений, приводящихся к ним, а именно: вопрос об установлении сходимости алгоритма, процесс исследования быстроты сходимости приближенного решения, получение эффективных оценок погрешности для построенного приближенного решения. Решению указанных задач было посвящено большое число работ. Тем не менее, эта сфера исследований требует дальнейших разработок.

При исследовании проекционных методов особое внимание уделяется выбору базиса, так как свойства базисных функций существенно влияют на скорость сходимости приближенных решений уравнения к точному решению (см., например, работы Г.М. Вайнико [2], И.К. Даугавет [3]). В одной из работ П.Е. Соболевский предложил выбрать в качестве базиса собственные функции оператора, который не зависит от времени и образует с оператором исследуемого уравнения, так называемый, острый угол. Эта идея была использована А.Г. Зарубиным, П.В. Виноградовой для исследования нестационарных дифференциально-операторных уравнений первого порядка с подчиненными операторами. М.Л. Горбачук применил собственные функции сходного оператора для приближенного решения стационарного линейного операторного уравнения.

В настоящее время имеется большое количество работ по проекционным и проекционно-разностным методам решения операторных уравнений первого порядка с произвольным базисом. Как правило, в таких публикациях сформулировано понятие слабого решения и установлены оценки скорости сходимости приближенных решений к слабому решению.

Необходимо отметить, что достаточно сложной задачей является изучение зависимости оценок скорости сходимости приближенных решений от вида базисных элементов, свойств операторов уравнения и его решения. Причем эта задача не решена и по настоящее время. К числу работ, содержащих некоторые частные результаты для стационарных операторных уравнений, относятся работы авторов Г.М. Вайникко, М.Л. Горбачука, А.В. Джишкариани, для обыкновенных дифференциальных уравнений – работы Н.М. Крылова, А.Ю. Лучка, для дифференциально-операторных уравнений первого порядка – работы П.В. Виноградовой, В. Калантарова, для эволюционного уравнения второго порядка – работы С.Е. Железовского.

Значительное количество краевых и начально-краевых задач для уравнений с частными производными, встречающихся в математической физике, механике, гидродинамике и других областях, приводят к необходимости решения краевых задач для соответствующих дифференциально–операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Таким образом, наличие разработанных методов решения для операторных уравнений позволяет решить данные задачи.

Проекционные методы для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка практически не исследовались. Можем указать лишь некото-

[2]Вайникко Г.М. О быстроте сходимости метода моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, С. 21–28.

[3]Даугавет И.К. О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6. № 1. С. 70–85.)

рые исследования приближенных методов решения нестационарных уравнений третьего порядка в частных производных, основанных на разностных схемах (см. работы Н.С. Бахвалова [4], Я.М. Жилейкина [5], Н.И. Юрчука [6]).

Авторы Jing Niu, Ping Li [7] в своей работе исследовали численный метод решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения третьего порядка в частных производных. Метод основан на использовании ортогонального базиса в гильбертовом пространстве. Авторы получили аппроксимационную задачу и установили разрешимость полученной аппроксимационной задачи, а также доказали сходимость приближенных решений. Однако оценки скорости сходимости в указанной работе не установлены.

В связи с вышеизложенным актуальной задачей является доказательство теорем существования и единственности сильных решений нестационарных операторных уравнений третьего порядка, а также разработка проекционных методов их решения.

Цель работы. Исследовать краевые задачи для линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему несамосопряженным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве. А именно:
— исследование разрешимости аппроксимационных уравнений, составленных по методу Галёркина;
— исследование скорости сходимости приближенных решений;
— применение доказанных абстрактных теорем к различным математическим моделям, сфорулированных в задачах естествознания;
— численная реализация разработанных приближенных методов для определенного ряда задач.

Методы исследования. В данной работе применены методы функционального анализа, проекционные методы построения решений, теория операторов в гильбертовом пространстве, теория пространств Соболева, приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

---

[4]Бахвалов Н.С. Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в диссипативной среде // Акустич. ж. 1978. Т. 24, № 4. С. 473—479.

[5]Жилейкин Я.М. О численном решении уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков // Журнал выч. мат. и мат. физики. 1982. Т. 22, № 5. С. 1157—1171.

[6]Юрчук Н.И. Разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально–операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 626—636.

[7]Jing N., Ping L. Numerical Algorithm for the Third-Order Partial Differential Equation with Three-Point Boundary Value Problem // Abstract and Applied Analysis. 2014. V. 201

Научная новизна; положения, выносимые на защиту. Главные результаты диссертации получены впервые и состоят в следующем.

– Доказаны теоремы о разрешимости краевых задач для некоторых дифференциально–операторных уравнений третьего порядка.

– Получены новые теоремы для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка о сходимости приближенных решений, составленных с помощью метода Галёркина, в сильных нормах.

– Получены новые оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Галёркина, к точному решению в равномерной по времени топологии.

– Выполнена численная реализация разработанных вычислительных методов.

Степень достоверности результатов диссертации. Все результаты диссертации достоверны, что подтверждается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический и прикладной характер. Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при дальнейшем развитии приближенных методов решения дифференциально-операторных уравнений высших порядков в гильбертовом пространстве. А также, данные результаты можно эффективно применять при численном решении прикладных задач, возникающих в различных областях естествознания.

Апробация работы. Доклады, содержащие основные результаты диссертации, сделаны на 27-ой Всероссийской Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2013), на 9-й Казанской летней школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 2013), на 6-й Международной научной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий"(Воронеж, 2013), на международной конференции Воронежской математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 2015 г.), на всероссийской научно – практической конференции "Повышение эффективности транспортной системы региона: проблемы и перспективы"(Хабаровск, 21 – 22 октября 2015г.), на научном семинаре ВЦ ДВО РАН под руководством чл.-корр. РАН С.И. Смагина, на семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Г. Зарубина в ТОГУ.

Публикации. Главные результаты диссертации были опубликованы в 9 работах, из которых 3 статьи – в российских журналах, рекомендованных ВАК РФ. Зарегистрирована одна программа для ЭВМ. Некоторые работы выполнены в соавторстве.

В работе [1] автор сформулировал и доказал теоремы 1, 2 и 3, в работе [7] – теоремы 1 и 2, в работе [8] – теоремы 1 и 2, а также результаты, касающиеся приложений разработанных в работе методов к начально-краевым задачам, вклад автора в работах [4] и [5] одинаков с вкладом соавтора.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, которые разбиты на параграфы, и списка литературы. Объем диссертации 90 страниц. Список литературы включает в себя 121 наименований.

Содержание работы. Изложим материал диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы, проведен анализ литературных источников по рассматриваемой проблеме. Сформулированы цели работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе диссертации исследованы проекционные методы решения краевых задач для линейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка.

Данная глава включает в себя пять параграфов. В первом параграфе описаны основные функциональные пространства и приведены некоторые вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе для линейного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка установлена равномерная оценка скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Галёркина. Приведём основные положения первой главы.

Обозначим через H_1 – сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство H. Норму в H обозначим через $\|\cdot\|_H \equiv \|\cdot\|$ и скалярное произведение – через $(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим следующую задачу в H

$$u'''(t) + Au(t) + K(t)u(t) = h(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0. \tag{2}$$

Оператор $K(t)$ и функции $u(t)$, $h(t)$ определены на $[0,T]$. Положим, что оператор A удовлетворяет следующим условиям:

1) A – самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A) = H_1$.

2) Найдется такая постоянная $\beta > 0$, что

$$(Av, v) \leq -\beta \|v\|^2$$

для любого $v \in H_1$.

Норму в пространстве $L_2(0,T;H)$ обозначим через $\|\cdot\|_{0,2}$. Рассмотрим в H самосопряженный оператор A с областью определения H_1. Норму в пространстве $W_2^3(H, H_1)$ определим равенством

$$\|u\|_{2,3} = \left(\sum_{j=0}^{3} \int\limits_0^T \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|^2 dt + \int\limits_0^T \|Au(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^3(H, H_1)$ подпространство, элементами которого являются функции $u(t) \in W_2^3(H, H_1)$, удовлетворяющие условию $u(0) = u(T) = u'(0) = 0$.

Тогда функцию $u(t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^3(H, H_1)$, которая удовлетворяет почти при всех t уравнению (1), назовём решением задачи (1).

Обозначим через $\{e_i |\, e_i \in H_1\}_{i=1}^{\infty}$ – полную ортонормированную в H систему собственных элементов оператора $(-A)$, а через λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_n, \ldots$ – соответствующие собственные числа, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$, и $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пусть P_n – ортопроектор в H на линейную оболочку H^n элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n.

В подпространстве H^n рассмотрим задачу

$$u_n'''(t) + Au_n(t) + P_n K(t) u_n(t) = P_n h(t), \tag{3}$$

$$u_n(0) = u_n(T) = u_n'(0) = 0, \tag{4}$$

где $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) e_i$.

В дальнейшем различные положительные постоянные, независящие от n и t, будем обозначать через C.

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $h(t) \in L_2(0,T;H)$, выполнены условия 1)–2) и для любых z из H_1 верны неравенства*

$$(K(t)z, z) \leq 0,$$

$$\|K(t)z\| \le C\|Az\|^{\alpha}\|z\|^{1-\alpha}, \quad 0 \le \alpha < 1.$$

Тогда

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_n - u\| \le C\lambda_{n+1}^{-1/2}.$$

В третьем параграфе для задачи (1)–(2) исследован метод Галёркина, когда в качестве базисных функций использованы собственные элементы оператора B, сходного с главным оператором A. Известно, что оператор A имеет полную ортогональную систему собственных элементов. Тем не менее исследуемый в данном параграфе проекционный метод построен по собственным элементам оператора B. Это связано с тем, что часто оператор B имеет более простую структуру, при которой собственные элементы можно выписать явно. А это в свою очередь может оказаться полезным при использовании разработанных методов в численном эксперименте.

Полную ортонормированную систему собственных элементов оператора $(-B)$ обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$, а через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ – соответствующие собственные числа, причем $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \dots$, $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пусть P_n – ортопроектор в H на линейную оболочку H^n элементов e_1, e_2, $\dots$, e_n. В подпространстве H^n рассмотрим задачу

$$u_n'''(t) + P_nAu_n(t) + P_nK(t)u_n(t) = P_nh(t), \tag{5}$$

$$u_n(0) = u_n(T) = u_n'(0) = 0. \tag{6}$$

Для аппроксимационной задачи (5)–(6) доказана следующая теорема о разрешимости.

Теорема 2. *Пусть $h(t) \in L_2(0,T;H)$, выполнены условия 1)–2) и для любых z из H_1 верны неравенства*

$$(K(t)z, z) \le 0,$$

$$\|K(t)z\| \le C\|Az\|^{\alpha}\|z\|^{1-\alpha}, \quad 0 \le \alpha < 1.$$

Тогда при каждом n задача (5)–(6) имеет единственное решение $u_n(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^3(H, H_1)$. Верна оценка

$$\|u_n\|_{2,3} \le C.$$

При выполнении условий теоремы 2 для приближенных решений u_n задачи (1)–(2) установлены следующие оценки скорости сходимости к сильному решению

$$\|(-A)^{1/2}(u_n - u)\|_{0,2} \leq C\lambda_{n+1}^{-1/2},$$
$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_n - u\| \leq C\lambda_{n+1}^{-1/2}.$$

В четвертом параграфе дано приложение разработанных проекционных методов к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

В прямоугольнике $\overline{Q} = [0,1] \times [0,T]$ исследована следующая задача

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - b(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{7}$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u(x,T) = 0, \tag{8}$$

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = u(1,t) = \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{9}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции, такие, что $a(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $b(x,t) \in C(\overline{Q})$, $f(x,t) \in L_2(Q)$. Отметим, что краевые условия (9) могут быть и неоднородными.

На основании абстрактной теоремы 1 для приближенных решений u_n задачи (7)–(9), составленных с помощью метода Галёркина, установлена оценка

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_n(x,t) - u(x,t)\|_{L_2(0,1)} \leq Cn^{-2}. \tag{10}$$

В пятом параграфе приведены результаты численного решения задачи (7)–(9).

Положим

$$f(x,t) = (x-1)^3\Big((6x^3 - 8t^3x^9(t-T))\cos x^3t^2 - (4t^2x^6 + 4tx^6(2t-T)+$$

$$4x^6t(3t-2T))\sin x^3t^2\Big) + (t-T)\Big((216t^4x^3(x-1)^2 + 270t^4x^4(x-1)+$$

$$144t^4x^2(x-1)^3 + 108t^4x^3(x-1)^4 + 108t^4x^4(x-1)^3 + 81t^4x^8(x-1)^3)\sin x^3t^2-$$

$$(216t^2x(x-1) + 72t^2x^2 + 72t^2(x-1)^2 - 162t^2x^5(x-1)^3 - 81t^2x^6(x-1)^2-$$

$$162t^6x^6(x-1)^2 - 162t^6x^5(x-1)^3 - 81t^6x^6(x-1)^4)\cos x^3t^2\Big)-$$

$$3a(x,t)\Bigg((t-T)((x-1)^2\sin x^3t^2+t^2x^2(x-1)^3\cos x^3t^2)\Bigg)-$$
$$b(x,t)(x-1)^3(t-T)\sin x^3t^2,$$
$a(x,t)=-x^3t$, $b(x,t)=x^2+t^2$.

При указанных входных данных задача (7)–(9) имеет точное решение

$$u(x,t)=(t-T)(x-1)^3\sin x^3t^2.$$

Обозначим $x_i=\frac{i}{100}$, $i=1,\dots,100$, $t_s=\frac{Ts}{100}$, $s=1,\dots,100$,

$$E(n)=\max_{i,s}|u(x_i,t_s)-u_n(x_i,t_s)|.$$

В таблицах 1–3 показана зависимость ошибки E от значения n при различных T.

Таблица 1. Ошибка при $n=10$

$T=0.5$	$T=1$	$T=2$
$E=0.0000000298$	$E=0.0000000304$	$E=0.0000000311$

Таблица 2. Ошибка при $n=50$

$T=0.5$	$T=1$	$T=2$
$E=0.0000000001$	$E=0.0000000011$	$E=0.0000000012$

Таблица 3. Ошибка при $n=100$

$T=0.5$	$T=1$	$T=2$
$E=0.0000000002$	$E=0.0000000003$	$E=0.0000000004$

Данные, представленные в таблицах 1-3, согласуются с теоретической оценкой (10).

На рисунках 1, 2 и 3 приведены графики приближенных решений при $n=100$ и $T=0.5$, $T=1$, $T=2$, соответственно.

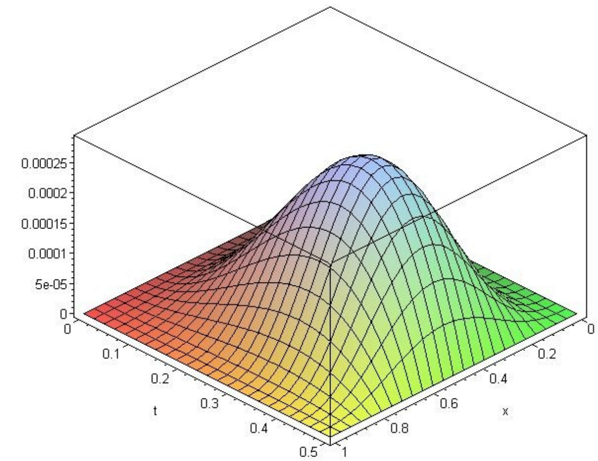

Рисунок 1. График приближенного решения задачи (7)–(9) при $n = 100$ и $T = 0.5$

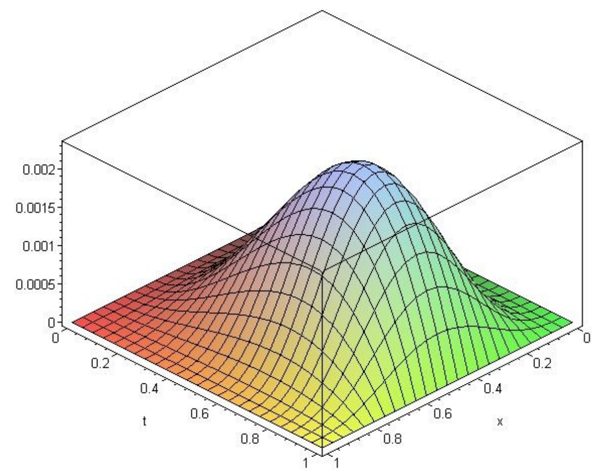

Рисунок 2. График приближенного решения задачи (7)–(9) при $n = 100$ и $T = 1$

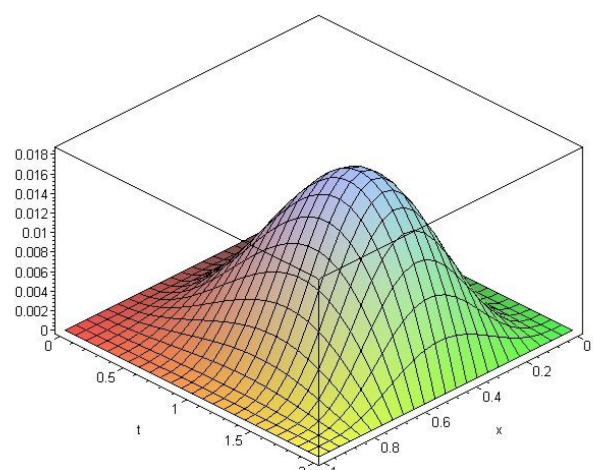

Рисунок 3. График приближенного решения задачи (7)–(9) при $n = 100$ и $T = 2$

Вторая глава посвящена исследованию нелинейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка.

В первом параграфе получена равномерная оценка на галёркинские приближения.

Рассмотрим в пространстве H задачу

$$u'''(t) + Au(t) - K[u(t)] = h(t), \tag{11}$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0. \tag{12}$$

Предположим, что оператор A удовлетворяет условиям 1) и 2) второго параграфа первой главы. Нелинейный оператор $K[\cdot]$ является монотонным.

Пусть e_1, e_2, $\ldots, e_n, \ldots$ – полная ортонормированная система собственных элементов оператора $(-A)$, P_n – ортопроектор в H на линейную оболочку H^n элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n. В подпространстве H^n рассмотрим задачу

$$u_n'''(t) + Au_n(t) - P_nK[u_n(t)] = P_nh(t), \tag{13}$$

$$u_n(0) = u_n(T) = u_n'(0) = 0. \tag{14}$$

В работе Виноградовой П.В. и Самусенко А.М. [8] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $h(t) \in L_2(0, T; H)$, $K[0] = 0$, *выполнены условия 1)–2) и для любых* z_1, z_2 *из* H_1 *верно неравенство*

$$\|K[z_1] - K[z_2]\|_{0,2} \leq \tag{15}$$

$$\leq \varphi\left(\left\|(-A)^{\frac{1}{2}}z_1\right\|_{0,2}, \left\|(-A)^{\frac{1}{2}}z_2\right\|_{0,2}\right)\|A^{\alpha}(z_1 - z_2)\|_{0,2}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

где $\varphi(\xi)$ *– положительная, непрерывная функция на* R_+^2. *Тогда при каждом* n *задача* (13)–(14) *имеет единственное решение* $u_n(t) \in W_2^3(H, H_1)$, *последовательность* $\{u_n(t)\}$ *сходится в* $W_2^3(H, H_1)$, *причем предельный элемент является сильным решением задачи* (11)–(12). *Сильное решение задачи* (11)–(12) *единственно.*

При предположениях теоремы 3 в диссертации устанавлена равномерная оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (11)–(12), построенных по методу Галёркина (13)–(14).

[8] Виноградова П.В., Самусенко А.М. Проекционный метод для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с нелинейным монотонным оператором // Сибирский журнал инд. математики. 2012. Т. 15 № 4(52). С. 64-70.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы 3 справедлива оценка*

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_n-u\|+\|u_n'-u'\|_{0,2}+\|(-A)^{1/2}(u_n-u)\|_{0,2}\le C\lambda_{n+1}^{-1/2}. \qquad (16)$$

Во втором параграфе исследована задача (11)–(12) при условии подчинения

$$\|K[z]\|\le\varphi\left(\|z\|\right)\|Az\|^{\alpha}\|z\|^{1-\alpha},\quad 0\le\alpha<1, \qquad (17)$$

где $\varphi(\xi)$ – положительная, непрерывная функция на R_+.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $h(t)\in L_2(0,T;H)$, $K[0]=0$, *выполнены условия 1)–2) и для любых* z *из* H_1 *верно неравенство* (17), *тогда имеет место оценка*

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_n-u\|\le C\lambda_{n+1}^{-1/2}. \qquad (18)$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и для любых* z_1, z_2 *из* H_1 *верно неравенство*

$$\|K[z_1]-K[z_2]\|\le\varphi_1\left(\|z_1\|,\|z_2\|\right)\|A(z_1-z_2)\|^{\alpha},\ \ 0\le\alpha<1, \qquad (19)$$

где $\varphi_1(\xi,\eta)$ *– положительная, непрерывная функция на* R_+^2. *Тогда при каждом* n *задача* (13)–(14) *имеет единственное решение* $u_n(t)\in W_2^3(H,H_1)$, *последовательность* $\{u_n(t)\}$ *сходится в* $W_2^3(H,H_1)$, *причем предельный элемент является сильным решением задачи* (11)–(12). *Сильное решение задачи* (11)–(12) *единственно.*

В третьем параграфе приведены приложения абстрактной теории к нелинейным начально-краевым задачам в частных производных. Приведём один пример.

Обозначим через $\overline{\Omega}$ треугольник $0\le x_2\le x_1\le\pi$. В цилиндре $\overline{Q}=\overline{\Omega}\times[0,T]$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^3u(x,t)}{\partial t^3}-\Delta^2u(x,t)-u(x,t)|u(x,t)|^{\rho}=h(x,t),\ \ (x,t)\in Q, \qquad (20)$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (21)$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{22}$$
где $1 \leq \rho < 4$.

На основании абстрактной теории, развитой в третьем параграфе, при $h(x,t) \in L_2(Q)$ установлена следующая оценка на приближения Галёркина для задачи (20)–(22)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(x,t) - u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C(n+1)^{-2}.$$

В четвертом параграфе приведены результаты численного решения задачи (20)–(22).

Тестирование представленных в диссертации численных алгоритмов на модельных задачах показало эффективность разработанных приближенных методов.

Заключение.

В диссертации разработаны и обоснованы проекционные методы решения краевых задач для дифференциально-операторных уравнений третьего порядка, приведено доказательство разрешимости аппроксимационных уравнений, установлена и исследована зависимость скорости сходимости исследуемых приближенных методов. Полученные в диссертации теоретические результаты для абстрактных дифференциально-операторных уравнений позволили вывести новые оценки скорости сходимости приближенных методов решения начально-краевых задач для нестационарных уравнений третьего порядка в частных производных.

Выполнена численная реализация рассмотренных вычислительных методов. Разработанная программа для ЭВМ предназначена для решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных с производной по времени третьего порядка, содержащего оператор Лапласа. В зависимости от введенных входных данных (коэффициентов уравнения и правой части) программа находит приближенное решение, а также строит график решения указанной задачи. Результаты численного эксперимента подтверждаются теоретическими выводами.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи автора в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Виноградова П.В., Королева Т.Э. Об одном проекционном методе для линейного уравнения третьего порядка // Известия вузов. Математика. 2014, № 11. С. 26-32.

2. Виноградова П.В., Королева Т.Э. О равномерной оценке скорости сходимости метода Галеркина для нелинейного уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ. 2014. Т.21, № 2 (82). С. 3-7.

3. Виноградова П.В., Королева Т.Э. // Оценка скорости сходимости метода Галеркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка // Вестник ТОГУ. 2014. № 3 (34). С. 17- 22.

Прочие публикации

4. Виноградова П.В., Королева Т.Э. О методе Галёркина для уравнения третьего порядка с монотонным оператором // Материалы Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". Воронеж, ВГУ, 2013, с. 49-50.

5. Виноградова П.В., Королева Т.Э. Равномерная сходимость метода Галёркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка // Материалы XI Казанской летней школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 22-28 августа 2013 г.)- Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2013. Т46. С. 149-150.

6. Королева Т.Э. О равномерной оценке сходимости метода Галёркина для дифференциальных уравнений высших порядков // Материалы VI Международной научной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий"(ПМТУКТ - 2013, 10 - 16 сентября 2013, Воронеж, Россия) - Воронеж: ИПЦ Воронеж. гос. ун-т., 2013. С. 127.

7. Королева Т.Э. О методе Галёркина для уравнения третьего порядка // Материалы международной конференции Воронежской математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 27 января - 2 февраля 2015 г.) - Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. С.63.

8. Королева Т.Э. Проекционный метод для нелинейного дифференциально-операторного уравнения // Материалы всероссийской научно – практической конференции "Повышение эффективности транспортной системы региона: проблемы и перспективы"(Хабаровск, 21 – 22 октября 2015г.) – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2015.

9. Королева Т.Э. Программа "Численное решение начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных с производной по времени третьего порядка". Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015615369 от 15.05.2015г.